Verwendung von ausgewählten Operatoren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht

bei Verfügbarkeit des grafikfähigen Taschenrechners (GTR)

an allgemein bildenden Gymnasien,
Abendgymnasien und Kollegs
im Freistaat Sachsen

Januar 2002

Sächsisches Staatsministerium für Kultus

Inhalt Seite

1 Vorbemerkungen

Mit der Einführung des grafikfähigen Taschenrechners (GTR) in den Fächern **Mathematik, Physik, Chemie und Biologie** als zugelassenes Hilfsmittel im Fachunterricht, insbesondere in Klassenarbeiten, in Klausuren und Abiturprüfungen, ergibt sich die Forderung nach einer einheitlichen Verwendung von Operatoren (Schlüsselwörtern) in Aufgabenstellungen. Durch sie soll dem Schüler klar werden, welche geistigen Tätigkeiten und welche Lösungsdarstellung von ihm erwartet werden. Die einheitliche Verwendung der Operatoren in Mathematik und den naturwissenschaftlichen Fächern ermöglicht eine höhere Transparenz bei der Bewertung der mithilfe des GTR erbrachten Leistung.

Der GTR erweitert die Möglichkeiten der Lehrer und Schüler bei der Unterrichtsgestaltung. Mit einer Aufgabenkultur, die dem Schüler mehrere Strategien bzw. Hilfsmittel für das Problemlösen offen lässt, kommt es bei der Lösungsdarstellung und Leistungsfeststellung auf ein eindeutiges Erwartungsbild an. Die beim Formulieren der Aufgaben verwendeten Operatoren müssen im Unterricht eingeführt und ihr Gebrauch an verschiedenen Beispielen geübt werden.

Im **mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht** wird ein ausgewogenes Verhältnis zwischen der Arbeit ohne Hilfsmittel und der verständigen Nutzung moderner Werkzeuge angestrebt. Der Einsatz des GTR ist insbesondere dann zweckmäßig, wenn er

- durch Visualisierungen die Problemanalyse unterstützt, z. B. Darstellung umfangreicheren Datenmaterials, zeitlicher Verläufe von Prozessen, von Abhängigkeiten bzw. Korrelationen,
- als heuristisches Werkzeug genutzt wird, z. B. zum systematischen Probieren, vollständigen Durchmustern, Kontrollieren,
- beim Problemlösen aufwändiger Routineaufgaben entlastet und dadurch die Konzentration auf den zu bearbeitenden Sachverhalt fokussiert, z. B. durch Reduzierung des Aufwandes für numerische Berechnungen, Regressionen, Approximationen, Rekursionen oder grafische Darstellungen, Erhöhung der Effektivität beim Rechnen mit tabellarisch erfassten Daten,

- die Anzahl der einsetzbaren Lösungswege bei der Lösung eines Problems erhöht, z. B. den Einsatz unterschiedlicher Werkzeugebenen, die Zerlegung des Problems in solche Teilprobleme, für deren Bearbeitung geeignete GTR-Programme existieren,
- zum Simulieren verwendet wird, z. B. bei der Untersuchung stochastischer Prozesse unter Verwendung von Zufallszahlen, bei Auswirkungen einer Variation von Koeffizienten in Funktionsgleichungen oder von Größen in Formeln,
- unterschiedliche Darstellungsformen für einen Sachverhalt oder eine Datenmenge ermöglicht, z. B. die Kombination tabellarischer, analytischer und grafischer Darstellungen bei funktionalen Zusammenhängen, tabellarischen und grafischen Darstellungen von Daten und ihren Kenngrößen.

Im Aufgabentext sollten die Schüler i. d. R. nicht ausdrücklich zur Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners (GTR) aufgefordert werden. Sie sollen Einsatzmöglichkeiten erkennen und möglichst selbstständig auswählen, mit welchen Hilfsmitteln sie die gestellten Aufgaben lösen. Das schließt die Entscheidung für die grafische oder numerische Werkzeugebene des GTR ebenso ein wie die Auswahl geeigneter Programme.

In den Fächern **Biologie, Chemie und Physik** wird es kaum Aufgaben geben, die ausschließlich durch die Nutzung des GTR lösbar wären (auch sollte nicht vordergründig nach solchen Beispielen gesucht werden). Vielmehr müssen dem Schüler durch den Einsatz des GTR rationelle Wege zur Lösung bestimmter Aufgabenklassen aufgezeigt werden. Rasche Fallunterscheidungen und explorierende Vorgehensweisen gewinnen an Bedeutung.

Werden zur Problemlösung Programme genutzt, muss der Lösungsweg erkennbar bleiben. Es genügt deshalb i. d. R. nicht, den Namen eines Programms zu nennen, es sei denn, dieses wurde im Unterricht erarbeitet oder umfassend eingeführt. Es muss deutlich werden, aus welchen Eingabedaten mithilfe des Programms welche Ergebnisse gewonnen wurden. Ergeben sich dabei falsche oder unvollständige Lösungen, trägt der Nutzer die alleinige Verantwortung.

Die in diesem Material vorgestellte Verwendung von Operatoren mit den sich anschließenden Aufgabenbeispielen soll die Lehrer bei der Formulierung von Aufgaben, insbesondere für Klassenarbeiten, Klausuren und Prüfungen, unterstützen.

2 Wesentliche Operatoren bei Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners

In der folgenden Tabelle sind wesentliche Operatoren, die in Aufgabenstellungen mathematisch-naturwissenschaftlicher Fächer verwendet werden, sowie die jeweils zu erwartenden Schülertätigkeiten bei Nutzung des GTR zusammengestellt.

Für die Darstellung der Lösungen durch den Schüler gilt der Grundsatz: **Der Lösungsweg ist nachvollziehbar sowie ggf. in sprachlich einwandfreier Form darzustellen.**

Wesentliche Operatoren bei Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners

Operatoren im Aufgabentext	Schülertätigkeiten
Geben Sie ... **an** **Nennen Sie** ...	Ergebnis numerisch oder verbal formulieren, ohne Darstellung des Lösungswegs und ohne Begründungen
Skizzieren Sie ...	Die wesentlichen Sachverhalte angeben
Beschreiben Sie ...	Darstellen eines Sachverhalts oder Verfahrens in Textform unter Verwendung der jeweiligen Fachsprache I. d. R. sollten grammatikalisch vollständige Sätze gebildet werden.
Ermitteln Sie ... **Bestimmen Sie** ...	Lösungsweg darstellen und Ergebnis formulieren; die Wahl der Mittel (z. B. grafisch oder numerisch) bleibt offen Durch Einschränkungen wie „Ermitteln Sie grafisch“ oder „Bestimmen Sie rechnerisch“ wird die Verwendung der Werkzeugebenen des GTR beschränkt. Die Verwendung von GTR-Programmen ist grundsätzlich gestattet, jedoch muss auf die Nutzung eines Programms (ggf. auch Ein- und Ausgabedaten) verwiesen werden. Beim grafischen Ermitteln von Lösungen kann dies durch das Anfertigen einer Zeichnung auf Papier oder durch die Darlegung der Lösungsschritte beim grafischen Lösen mit GTR erfolgen. Ein Abzeichnen des Displaybildes ist nicht notwendig.
Berechnen Sie ...	Ergebnis von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen Die Nutzung des GTR einschließlich von GTR-Programmen ist zulässig, lediglich die grafische Werkzeugebene ist ausgeschlossen. Wird die Angabe von Zwischenschritten gewünscht, ist dies in der Aufgabenstellung auszuweisen, z. B. durch „Leiten Sie ... her“, „Stellen Sie Zwischenschritte der Berechnung dar“, „Geben Sie Zwischenschritte für die Ermittlung einer allgemeinen Lösung an“ oder „Geben Sie Zwischenergebnisse an“.
Zeichnen Sie ... **Stellen Sie** ... **grafisch dar**	Den Sachverhalt maßstäblich darstellen, konstruktive Elemente nutzen, ggf. Wertepaare berechnen
Untersuchen Sie ...	Eigenschaften von oder Beziehungen zwischen Objekten herausfinden und darlegen
Zeigen Sie ... **Weisen Sie nach** ... **Beweisen Sie** ...	Eine Aussage, einen mathematischen Satz nach gültigen Schlussregeln bestätigen (durch eine Herleitung oder eine logische Begründung)

3 Aufgabenbeispiele aus den Fächern

Durch die folgenden Beispiele sollen Unterschiede bei der Angabe des Lösungswegs und der Lösungen nach verschiedenen Aufforderungen im Aufgabentext verdeutlicht werden. Es werden ggf. auch mehrere Möglichkeiten im Erwartungsbild dargestellt.

3.1 Mathematik

In den Erwartungsbildern zu Bestimmungsaufgaben werden i. d. R. auch dann gerundete Werte angegeben, wenn ein exakter Wert (z. B. eine irrationale Zahl) ermittelbar ist. Dies soll die Verwendbarkeit des GTR bei solchen Aufgaben verdeutlichen. Werden vom Schüler Untersuchungen zu Existenz bzw. Eindeutigkeitsaussagen erwartet, so muss das im Aufgabentext deutlich gemacht werden (z. B.: Zeigen Sie, dass die Schnittpunktkoordinaten der beiden gegebenen Geraden irrational sind). Bei der Angabe von gerundeten Punktkoordinaten wird auf die Angabe des Rundungszeichens verzichtet (z. B. Punkt $P(2{,}3\,;\,0{,}4)$).

3.1.1 Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$. Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.

Operatoren im Aufgabentext	Mögliche Erwartungsbilder
Geben Sie den Inhalt dieser Fläche **an**.	$A \approx 3{,}2$
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.	$A \approx \left\lvert \int_0^{1{,}13} \left(x^3 + 2x^2 - 4\right) dx \right\rvert \approx 3{,}2$
	In der Darstellung des Graphen im GTR wurde nach Bestimmung der unteren und oberen Integrationsgrenze der Wert des bestimmten Integrals ermittelt. Der Flächeninhalt beträgt etwa 3,2.

3.1.2 Gegeben sind drei Punkte im Raum durch ihre Koordinaten.

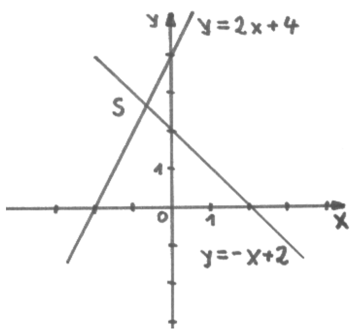
Operatoren im Aufgabentext	Mögliches Erwartungsbild
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden kann, ohne ein GTR-Programm zu verwenden.	1.) Man berechnet die Seitenlängen des Dreiecks jeweils mithilfe der Beziehung $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. 2.) Unter Verwendung des Kosinussatzes berechnet man z. B. γ über $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. 3.) Mithilfe der Flächenformel $A = \frac{ab}{2}\sin\gamma$ berechnet man schließlich den gesuchten Flächeninhalt.

3.1.3. Gegeben sind die Funktionen f durch $y = f(x) = x^2 + 3x$ und g durch $y = g(x) = x + 1$.

Operatoren im Aufgabentext	Mögliche Erwartungsbilder
Geben Sie die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g **an**.	$S_1(-2{,}4; -1{,}4)$; $S_2(0{,}4; 1{,}4)$
Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g.	Darstellen der Graphen beider Funktionen mit GTR Ablesen der Koordinaten der Schnittpunkte: $S_1(-2{,}4; -1{,}4)$; $S_2(0{,}4; 1{,}4)$
	f(x) = g(x) $x^2 + 3x = x + 1$ $x^2 + 2x - 1 = 0$ Lösen der quadratischen Gleichung mit GTR: $x_1 \approx 0{,}41$; $x_2 \approx -2{,}41$ Einsetzen in die Gleichung von g liefert: $S_1(-2{,}4; -1{,}4)$; $S_2(0{,}4; 1{,}4)$

3.1.4 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\underline{\begin{aligned} &(\mathrm{I})\ 2x - y = -4 \\ &(\mathrm{II}) - x - y = -2 \end{aligned}}$$

Operatoren im Aufgabentext	Mögliche Erwartungsbilder
Ermitteln Sie grafisch die Lösung des Gleichungssystems.	 Ergebnis: $x \approx -0{,}7$; $y \approx 2{,}7$
	Darstellen der Graphen der Funktionen $y_1 = 2x + 4$ und $y_2 = -x + 2$ mit GTR Ergebnis: $x \approx -0{,}67$; $y \approx 2{,}67$

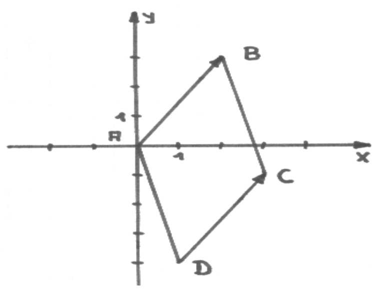
3.1.5 Gegeben sind die Geraden g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Operatoren im Aufgabentext	Mögliche Erwartungsbilder
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts **an.**	$S(-3;-4)$
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts beider Geraden**.**	(I) $-1+2s=1+2t$ (II) $-2+2s=-2+t$ (I) $2s-2t=2$ (II) $2s-\ t=0$ Lösen des Gleichungssystems mit GTR: $s=-1;\ t=-2$ Einsetzen von t in Gleichung der Geraden g: $S(-3;-4)$
	Zeichnen beider Geraden in dem Modus zur Darstellung parameterhaltiger Kurven im GTR und Ablesen der Koordinaten des Schnittpunkts liefert: $S(-3;-4)$
	Umformen der Geradengleichungen in die allgemeine Form mit Programm „Geraden“ liefert: g: $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ und h: $y=x-1$ Darstellen beider Geraden mithilfe des GTR und Ablesen des Schnittpunkts liefert: $S(-3;-4)$
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts beider Geraden. **Ermitteln Sie rechnerisch** die Koordinaten des Schnittpunkts beider Geraden.	(I) $-1+2s=1+2t$ (II) $-2+2s=-2+t$ (I) $2s-2t=2$ (II) $2s-\ t=0$ Lösen des Gleichungssystems mit GTR: $s=-1;\ t=-2$ Einsetzen von t in Gleichung der Geraden g: $S(-3;-4)$
	Verwendung eines GTR-Programms: Eingabe: Koordinaten von Stütz- und Richtungsvektoren Ergebnis: $S(-3;-4)$

3.1.6 Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{2x^2}{3x^2 + x^4}$.

Operatoren im Aufgabentext	Mögliches Erwartungsbild
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion auf Symmetrie.	$f(-x) = \dfrac{2(-x)^2}{3(-x)^2 + (-x)^4} = \dfrac{2x^2}{3x^2 + x^4} = f(x)$ Aus $f(-x) = f(x)$ folgt: Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

3.1.7 Gegeben sind die Punkte A(0;0), B(2;3) und D(1; – 4).

<table>
<tr><th>Operatoren im Aufgabentext</th><th>Mögliche Erwartungsbilder</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes C so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.</td><td>Anfügen von Vektor $\overrightarrow{AB}$ an den Ortsvektor $\overrightarrow{OD}$ liefert Ortsvektor $\overrightarrow{OC}$.
Ablesen der Koordinaten von diesem Vektor liefert Koordinaten des Punktes C: C(3 ; – 1)</td></tr>
<tr><td>$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
C(3 ;–1)</td></tr>
<tr><td>
C(3; – 1)</td></tr>
</table>

3.2 Physik

3.2.1 Zwei Fahrzeuge sind 1 500 m voneinander entfernt und bewegen sich mit der Geschwindigkeit 30 m · s^{-1} bzw. 15 m · s^{-1} aufeinander zu.

<table>
<tr><th>Operatoren im Aufgabentext</th><th>Mögliche Erwartungsbilder</th></tr>
<tr><td>Geben Sie Ort und Zeitpunkt der Begegnung zwischen den beiden Fahrzeugen an.</td><td>Ort: 1,0 km vom Startpunkt des Fahrzeugs mit der größeren Geschwindigkeit entfernt;
Zeit: 33 s</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Ermitteln Sie Ort und Zeitpunkt der Begegnung.</td><td>Darstellen der Graphen der beiden linearen Ort-Zeit-Funktionen auf dem GTR
$y_1 = 30x$
$y_2 = -15x + 1\,500$
Schnittpunktkoordinaten mit GTR ermitteln:
x = 33,333 und y = 1 000
Angabe von Ort und Zeit wie oben</td></tr>
<tr><td>Die beiden linearen Ort-Zeit-Funktionen liefern das System linearer Gleichungen:
$30x - y = 0$
$15x + y = 1\,500$
Lösung mit GTR: x = 33,333; y = 1 000
Angabe von Ort und Zeit wie oben</td></tr>
<tr><td>Systematisches Probieren
<table>
<tr><td>Zeit in s</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>33</td><td>34</td></tr>
<tr><td>s_a in m</td><td>600</td><td>900</td><td>1 200</td><td>990</td><td>1 020</td></tr>
<tr><td>s_b in m</td><td>300</td><td>450</td><td>600</td><td>495</td><td>510</td></tr>
<tr><td>Σ</td><td>900</td><td>1 350</td><td>1 800</td><td>1 485</td><td>1 530</td></tr>
</table>
Verfeinertes Probieren im Zeitintervall 33 bis 34
Angabe von Ort und Zeit wie oben</td></tr>
<tr><td>Rekursion mit GTR:
Eingabe:
$a_{n+1} = a_n + 30 \quad , a_0 = 0$
$b_{n+1} = b_n - 15 \quad , b_0 = 1500$
Startwert für n: 0
Endwert für n: 40

Angabe von Ort und Zeit: wie oben</td></tr>
</table>

3.2.2 Bei einer Untersuchung zum äußeren lichtelektrischen Effekt nach der Gegenfeldmethode ergaben sich folgende Messwerte:

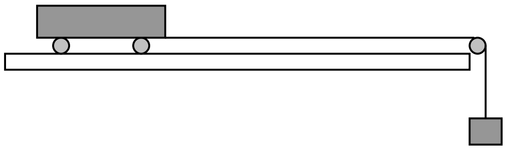
λ in nm	577,0	546,1	491,6	435,8	404,7
U in V	0,21	0,33	0,59	0,92	1,14

<table>
<tr><th>Operatoren im Aufgabentext</th><th>Mögliche Erwartungsbilder</th></tr>
<tr><td>Geben Sie die Frequenz des jeweils eingestrahlten Lichts an.</td><td><table><tr><td>f in 10^{14} Hz</td><td>5,20</td><td>5,49</td><td>6,10</td><td>6,88</td><td>7,41</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Ermitteln Sie unter Verwendung dieser Messwerte das PLANCKsche Wirkungsquantum.</td><td>Eingeben der Werte λ und U in Listen;
Berechnen und ablegen der Frequenz $f = \frac{c}{\lambda}$
und Energiewerte $e \cdot U$ in weiteren Listen;
h als Anstieg der Energie – Frequenz – Funktion; lineare Regression mittels GTR liefert: $6{,}75 \cdot 10^{-34}$
Ergebnis: $h = 6{,}75 \cdot 10^{-34}$ J · s</td></tr>
</table>

3.2.3 Auf einer langen, geraden Straße befindet sich zur Zeit 0 Fahrzeug A 30 m von einem Beobachter entfernt. Fahrzeug B befindet sich zur selben Zeit in der gleichen Richtung in 1 500 m Entfernung. Beide Fahrzeuge bewegen sich nun aufeinander zu. A fährt mit der konstanten Geschwindigkeit 20 m · s^{-1} während B aus der Ruhe heraus gleichmäßig beschleunigt und nach 10 s die Geschwindigkeit 30 m · s^{-1} erreicht. Mit dieser Geschwindigkeit fährt B dann gleichförmig weiter.

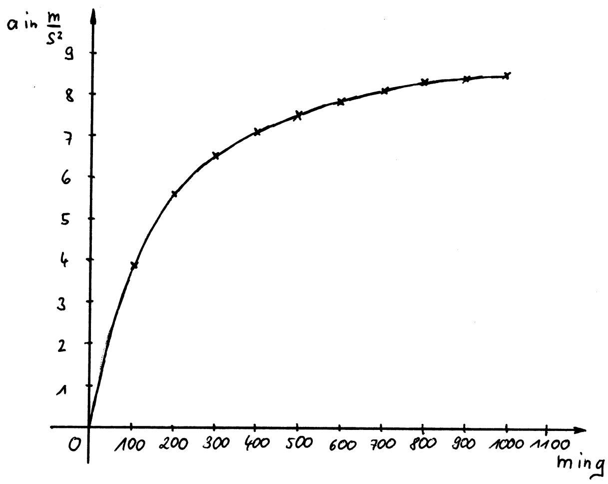
<table>
<tr><th>Operatoren im Aufgabentext</th><th colspan="2">Mögliches Erwartungsbild</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Berechnen Sie Ort und Zeitpunkt der Begegnung. Geben Sie Zwischenschritte für die Ermittlung einer allgemeinen Lösung an.</td><td>Fahrzeug A
$x_a = v_a t + x_{a0}$
$x_a = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot t + 30\ \text{m}$</td><td>Fahrzeug B
für $0 \leq t \leq 10$ s
$v_b = a \cdot t$
$a = -3{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
$x_b = 0{,}5a \cdot t^2 + x_{b0}$
$x_b = 1\,350$ m für $t = 10$ s
für $t \geq 10$ s
$v_b = -30\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$x_b = -30\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}(t - 10\ \text{s}) + 1\,350\ \text{m}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Begegnung bei $x_a = x_b = x_s$
Lösung: $t_s = 32$ s; $x_s = 0{,}68$ km</td></tr>
</table>

3.2.4 Ein Wagen wird entsprechend der Abbildung durch einen Hakenkörper der Masse *m* in eine beschleunigte Bewegung versetzt.

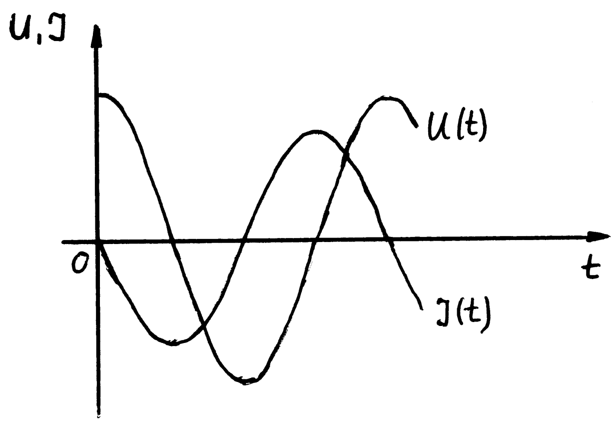


Dabei wird folgende Wertetabelle aufgenommen:

m in g	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
a in $m \cdot s^{-2}$	3,9	5,6	6,5	7,1	7,5	7,8	8,1	8,3	8,4	8,5

Operatoren im Aufgabentext	Mögliches Erwartungsbild
Stellen Sie die Funktion *a*(*m*) im Intervall $0 \leq m \leq 1\,000$ g **grafisch dar**.	

3.2.5 Ein geladener Kondensator wird zum Zeitpunkt 0 mit einer Spule zu einem Schwingkreis verbunden. Die entstehende elektromagnetische Schwingung ist ungedämpft.

Operatoren im Aufgabentext	Mögliches Erwartungsbild
Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von Spannung und Stromstärke für mindestens eine Periode.	

3.2.6 Ein Körper wird durch eine Kraft längs eines Weges beschleunigt. Dabei werden Messwerte *F(s)* aufgenommen. Eine Auswertung der Messreihe ergibt, dass die in Wegrichtung wirkende Kraft nicht konstant ist.

Operatoren im Aufgabentext	Mögliches Erwartungsbild
Beschreiben Sie eine Vorgehensweise bei der Ermittlung der im Intervall $[0;\ s_1]$ verrichteten mechanischen Arbeit.	Die Messwerte werden im GTR in Listen eingegeben. Durch Regressionsanalyse wird die Gleichung einer geeigneten Regressionsfunktion $F_{\mathrm{Reg}}(s)$ ermittelt. Das bestimmte Integral im Intervall $[0;\ s_1]$ entspricht der Maßzahl der verrichteten mechanischen Arbeit. $\int_0^{s_1} F_{\mathrm{Reg}}(s)\,\mathrm{d}s$ wird mit dem GTR ermittelt.

3.3 Chemie

3.3.1 Gegeben ist eine Ethansäurelösung der Stoffmengenkonzentration c = 0,1 mol · l^{-1} (K_s= 1,78 · 10^{-5} mol · l^{-1}).

Operatoren im Aufgabentext	Mögliche Erwartungsbilder
Geben Sie den pH-Wert der Ethansäurelösung **an**.	pH = 2,87
Ermitteln Sie den pH-Wert der Ethansäurelösung.	GTR-Programm zur pH-Wert-Berechnung: Eingabe der Stoffmengenkonzentration und der Säurekonstante, Ergebnis: pH = 2,87
Berechnen Sie den pH-Wert der Ethansäurelösung ohne Nutzung eines GTR-Programms.	$\mathrm{pH} = -\lg\left\{\sqrt{K_s \cdot c_0(\mathrm{HA})}\right\}$ pH = 2,87

3.3.2 Bei der Synthese von Ethansäureethylester werden 5 mol Ethansäure und 4 mol Ethanol zur Reaktion gebracht (K_C = 4). Da beide Ausgangsstoffe nicht wasserfrei sind, liegen zu Beginn der Reaktion auch 2 mol Wasser vor.

Operatoren im Aufgabentext	Mögliches Erwartungsbild
Entwickeln Sie für die Esterbildung die Reaktionsgleichung und **berechnen Sie** die Stoffmenge des Esters im Gleichgewicht unter Angabe von Zwischenschritten.	$CH_3\text{-}COOH + CH_3\text{-}CH_2OH \rightleftharpoons CH_3\text{-}COO\text{-}C_2H_5 + H_2O$ Stoffmengen im Gleichgewicht (5-x) mol (4-x) mol x mol (x+2) mol $K_C = \frac{c(\mathrm{Ester}) \cdot c(\mathrm{Wasser})}{c(\mathrm{Säure}) \cdot c(\mathrm{Alkohol})}$ (wegen $\Delta\gamma = 0$) $4 = \frac{x(x+2)}{(5-x)\cdot(4-x)}$ Lösen mit dem GTR: x_1 = 2,667 ; x_2 = 10,0 (entfällt) Im Gleichgewichtszustand liegen 2,667 mol Ethansäureethylester vor.

3.3.3 Die nachfolgende Gleichgewichtsreaktion beschreibt die großtechnische Herstellung von Methanol. $CO + 2\ H_2 \rightleftharpoons CH_3OH$

	CO	H_2	CH_3OH
$\Delta_B H$ in $kJ \cdot mol^{-1}$	-111	0	-201
S^0 in $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	198	131	240

Hinweise: $\Delta_R H$ und $\Delta_R S$ sind als temperaturunabhängig anzusehen. Gehen Sie bei Ihren Berechnungen von den Bedingungen des Standardzustands aus.

Operatoren im Aufgabentext	Mögliche Erwartungsbilder
Geben Sie die molare freie Reaktionsenthalpie für die oben genannte Reaktion **an**.	$\Delta_R G = -24{,}4\ kJ \cdot mol^{-1}$
Ermitteln Sie rechnerisch, die molare freie Reaktionsenthalpie und die Temperatur, für die gilt: $\Delta_R G = 0\ kJ \cdot mol^{-1}$.	GTR-Programm zur Berechnung in der Thermodynamik: Eingabe der Daten (Tabelle) und der Stöchiometriefaktoren Ergebnisse: $T = 409\ K$ $\Delta_R G = -24{,}4\ kJ \cdot mol^{-1}$
Untersuchen Sie grafisch die Abhängigkeit der molaren freien Reaktionsenthalpie von der Temperatur. Leiten Sie Aussagen zur Verlaufsrichtung der Methanolsynthese ab. Hinweis: $\Delta_R H = -90\ kJ \cdot mol^{-1}$ $\Delta_R S = -0{,}22\ kJ \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	Darstellen des Graphen der molaren GIBBSschen Enthalpie mit dem GTR $y_1 = -90 + x \cdot 0{,}22$ Die molare freie Reaktionsenthalpie nimmt mit steigender Temperatur linear zu. An der Stelle x = 409 schneidet der Graph die Abszissenachse. Aussagen zur Verlaufsrichtung: - für $T < 409\ K$ ist $\Delta_R G < 0$; Reaktion verläuft exergonisch - für $T = 409\ K$ ist $\Delta_R G = 0$; Reaktion befindet sich im Gleichgewicht - für $T > 409\ K$ ist $\Delta_R G > 0$; Reaktion verläuft endergonisch
Berechnen Sie unter Angabe von Zwischenschritten die molare freie Reaktionsenthalpie und die Temperatur, für die gilt: $\Delta_R G = 0\ kJ \cdot mol^{-1}$.	$\Delta_R H = \Delta_B H(CH_3OH) - [2\Delta_B H(H_2) + \Delta_B H(CO)]$ $\Delta_R H = -90\ kJ \cdot mol^{-1}$ $\Delta_R S = S^0(CH_3OH)\ ) - [2S^0(H_2) + S^0(CO)]$ $\Delta_R S = -0{,}22\ kJ \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ $\Delta_R G = \Delta_R H - T \cdot \Delta_R S$ $\Delta_R G = -24{,}4\ kJ \cdot mol^{-1}$ $T = \frac{\Delta_R H}{\Delta_R S}$ $T = 409\ K$

3.3.4 In einer Wasserprobe beträgt die Stoffmengenkonzentration an Calcium-Ionen $c(Ca^{2+}) = 2 \cdot 10^{-4}$ mol · l^{-1} ($K_L(CaF_2) = 3{,}4 \cdot 10^{-11}$ mol$^3 \cdot$ l^{-3}).

Operatoren im Aufgabentext	Mögliches Erwartungsbild
Zeigen Sie rechnerisch, dass in der analysierten Wasserprobe kein Niederschlag von Calciumfluorid ausfällt, wenn die Stoffmengenkonzentration der Fluorid-Ionen $c(F^-) = 5 \cdot 10^{-5}$ mol · l^{-1} beträgt.	$c(Ca^{2+}) \cdot c^2(F^-) = 5 \cdot 10^{-13}$ mol$^3 \cdot$ l^{-3} $c(Ca^{2+}) \cdot c^2(F^-) < K_L(CaF_2)$ Bei den angegebenen Konzentrationen fällt kein Niederschlag von Calciumfluorid aus, da das Löslichkeitsprodukt nicht überschritten wird.

3.4 Biologie

3.4.1 Das Fett Glycerinpalmitat ($C_{51}H_{98}O_6$) besteht aus einem Glycerinmolekül, das mit drei Molekülen Palmitinsäure verestert ist.

Operator im Aufgabentext	Mögliche Erwartungsbilder
Entwickeln Sie die Reaktionsgleichung für die vollständige Verbrennung dieses Fetts. **Geben Sie** den respiratorischen Quotienten für diesen Verbrennungsvorgang **an**.	$C_{51}H_{98}O_6 + 72{,}5\ O_2 \rightarrow 51\ CO_2 + 49\ H_2O$ $RQ = 0{,}70$
Berechnen Sie den respiratorischen Quotienten für diesen Verbrennungsvorgang unter Normbedingungen.	$RQ = \frac{V_{Kohlendioxid}}{V_{Sauerstoff}}$ $V = V_m \cdot n$ $RQ = 0{,}70$

3.4.2 Ein großer Hamburger hat den Energiegehalt 1 787 kJ, sechs Chicken Nuggets einen von insgesamt 1 201 kJ und eine große Cola (0,5 l) 980 kJ. Der zusätzliche Energiebedarf eines Menschen beträgt beim Gehen 23,4 kJ · min^{-1} und beim Fahrrad fahren 26,8 kJ · min^{-1}. Für den Aufbau von 1 kg Fett werden etwa 29 MJ benötigt.

Operatoren im Aufgabentext	Mögliche Erwartungsbilder
Ermitteln Sie, wie lange man zusätzlich gehen bzw. Rad fahren müsste, um nach dem Verzehr einer solchen Mahlzeit, bei ansonsten normaler Nahrungsaufnahme, nicht an Körpergewicht zuzunehmen.	Energiegehalt der Mahlzeit = 3 968 kJ $t_{Tätigkeit} = \frac{Energiegehalt_{(Mahlzeit)}}{Energieverbrauch_{(Tätigkeit)}}$ $t_{Gehen} = 170$ min $t_{Radfahren} = 148$ min
Geben Sie an, wie viel Fett theoretisch innerhalb eines Jahres aufgebaut würde, wenn man jede Woche solch eine Mahlzeit isst, ohne zusätzlich energieverbrauchende Tätigkeiten durchzuführen.	Zunahme an Fett im Jahr: 7,1 kg

3.4.3 Bei der Untersuchung verschiedener Tiger-Arten ergaben sich folgende Durchschnittswerte:

Art	Sibirischer Tiger	Bengal-Tiger	Sumatra-Tiger
Masse in kg	400	300	200
Länge ohne Schwanz in cm	280	250	160

Für eine Plausibilitätsbetrachtung wurden drei unterschiedlich große Bechergläser randvoll mit kochendem Wasser gefüllt. Bei der Abkühlung ergaben sich folgende Messwerte:

Zeit in min	Temperatur in °C		
	kleinstes Becherglas	mittleres Becherglas	größtes Becherglas
0	90	90	90
2	86	85	88
4	80	81	86
6	75	78	82
8	71	75	78
10	67	72	76
12	64	70	74
14	61	67	71
16	58	65	68
18	53	61	66
20	49	58	63

Operatoren im Aufgabentext	Mögliches Erwartungsbild
Beschreiben und begründen **Sie** den jeweiligen Temperaturverlauf der Bechergläser des Modellexperiments.	Eingabe der Messwerte in Listen und grafische Darstellung auf dem Display. Aus der grafischen Darstellung folgt: Die Wassertemperatur sinkt im kleineren Becherglas schneller als im größeren, da das größere Gefäß mit seiner im Verhältnis zum Volumen kleineren Oberfläche weniger Wärme abgibt als das kleinere Gefäß.
Interpretieren Sie die Temperaturveränderungen in den Bechergläsern als Modell für den Wärmehaushalt und die Verbreitung eines Sibirischen Tigers, eines Bengal-Tigers und eines Sumatra-Tigers.	Interpretieren: BERGMANNsche Regel - größere Tiere geben mit ihrer im Verhältnis zum Volumen kleineren Oberfläche weniger Wärme ab als kleinere Tiere; sie sind dadurch in kälteren Klimaten begünstigt - innerhalb eines Verwandtschaftskreises findet man daher bei Säugetieren oft die größeren Arten in kälteren Klimaten (Sibirischer Tiger) und die kleineren Arten in wärmeren Klimaten (Sumatra-Tiger)

Impressum

Herausgeber:

Sächsisches Staatsinstitut
für Bildung und Schulentwicklung
Comenius-Institut

Dresdner Str. 78 c
01445 Radebeul

Redaktion:
Claas Riedel

Autoren:

Ralf Ballmann
Dr. Christian Hache
Dr. Rainer Heinrich
Frank-Uwe Herbig
Frank Liebner
Olaf Priem
Dr. Horst Ocholt
Jürgen Wagner
Dr. Frank Wagner